תוכן העניינים:

תלמידים יקרים!

ספר זה מכיל את מלוא היצע הנושאים של הפרק ''ייצוג מספרים' הנמצא באתר גול.
על מנת לעשות בו שימוש מיטבי עליכם להיעזר בו במקביל לנושאים ולסרטונים
הפתוחים בעמוד הקורס המותאם למוסד ולחוג שלכם.

במידה וברצונכם לקבל מענה לנושאים נוספים הקשורים לייצוג מספרים
אתם מוזמנים לפנות לשירות לקוחות של האתר ואנו נעשה את מיטב המאמץ
לעדכן את תכני הפרק ותכני הקורס על מנת לתת את המענה הטוב ביותר עבורכם!

שתהיה למידה מהנה ופורה!
צוות האתר גול.

פרק 1

ייצוג מספרים

ייצוג מספרים בבסיסים שונים:

סיכום כללי:

כתיבת מספרים:

אופן הכתיבה של מספר במתמטיקה: $...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}...$

בסיס במערכת מספרים:

הבסיס מוגדר בתור מספר הספרות במערכת המספרים שבה מוצג מספר מסוים.
נסמן את הבסיס של מערכת מספרים כלשהי ב- r.
הספרות של מערכת מספרים בבסיס r הן: $[0:r-1]$.

סוגי בסיסים נפוצים:

שם	עשרוני (Decimal)	בינארי (Binary)	אוקטלי (Octal)	הקסדצימלי (Hexadecimal)
בסיס r	10	2	8	16
ספרות	[0: 9]	[0,1]	[0: 7]	[0: F]

אופן דוגמאות קריאת מספרים מבסיסים (בבסיס עשרוני):

כדי לקרוא מספר $...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}...$ בבסיס r נבצע:

$$a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}=a_2\cdot r^2+a_1\cdot r^1+a_0\cdot r^0+a_{-1}\cdot r^{-1}+a_{-2}\cdot r^{-2}$$

הערות:

- מספרים בבסיסים שונים ייכתבו באופן הבא: $(\mathrm{F0A2})_{16}$, $(23)_8$, $(101)_5$.
- לספרות 0,1 בבסיס הבינארי קוראים **סיביות** (או ביטים - Bits).

שאלות:

1) המר את המספרים הבינאריים הבאים לעשרוניים:

א. 1011 ב. 1001001000110010

ג. 10.01 ד. 11011.00101

2) מצא את ערכם העשרוני של המספרים הבאים בבסיסים שלהם:

א. $(25)_6$ ב. $(32)_4$ ג. $(121)_3$

ד. $(1.2)_3$ ה. $(43.2)_6$ ו. $(41.23)_5$

3) מצא את ערכם העשרוני של המספרים ההקסדצימלים הבאים:

א. FB1 ב. 20AB ג. 3B.A

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 37426 ג. 2.25 ד. 27.15625.

2) א. 17 ב. 14 ג. 16 ד. $1\frac{2}{3}$ ה. $27\frac{1}{3}$ ו. 21.52.

3) א. 4017 ב. 8363 ג. 59.625.

פעולות אריתמטיות עם מספרים בינאריים:

סיכום כללי:

חיבור וחיסור מספרים בבסיסים שונים:

נחבר שני מספרים M ו- N (שניהם בבסיס r) באמצעות חיבור ארוך ספרה-ספרה מה-LSB כלפי ה-MSB. כאשר תוצאת החיבור גדולה מ- $r-1$ נעביר ספרה לדרגה הבאה.
בחיבור שני מספרים (בבסיס r) בני N ספרות כל אחד תיתכן תוצאה

נחסר שני מספרים M ו- N (שניהם בבסיס r) באמצעות חיסור ארוך ספרה-ספרה (מחסר פחות מחוסר) מה-LSB כלפי ה-MSB.
בנושא זה נעסוק רק בחיסור מהצורה $M-N$ כאשר $M>N$.
אם תוצאת החיסור בדרגה מסוימת לא אפשרית, נשאיל מהספרה בדרגה הבאה (borrow).

כפל וחילוק מספרים בבסיסים שונים:

נכפול שני מספרים M ו- N (שניהם בבסיס r) באמצעות כפל ארוך.

נחלק שני מספרים M ו- N (שניהם בבסיס r) באמצעות חילוק ארוך.

חוקיות והגדרות:

- בחיבור של שני מספרים (בבסיס r) בני n ספרות כל אחד תיתכן תוצאה בעלת $n+1$ ספרות. במקרה זה, ספרת ה-MSB נקראת נשא (carry).
- בכפל של שני מספרים (בבסיס r) בני n ו- m ספרות כל אחד תיתכן תוצאה בעלת $n+m$ ספרות.

שאלות:

1) נתונים שני המספרים הבאים: A: 10011011, B: 10001101.

א. חשב את הסכום של שני המספרים בבסיס בינארי.

ב. חשב את ההפרש: A-B.

2) חשב את הסכומים וההפרשים הבאים:

א. $(4AB)_{16}+(80E)_{16}$

ב. $(FF20)_{16}-(E40A)_{16}$

ג. $(702)_8+(45)_8$

ד. $(360)_8-(21)_8$

ה. $(122)_3+(210)_3$

ו. $(221)_3-(102)_3$

3) חשב את המכפלות הבאות:

א. $(AB)_{16}\cdot(E7)_{16}$

ב. $(750)_8\cdot(62)_8$

ג. $(1001)_2\cdot(101)_2$

4) חשב את חילוק המספרים הבאים:

א. 110100: 100

ב. 1111000: 1100

ג. 1100100: 1101

תשובות סופיות:

1) א. 100101000 ב. 1110.

2) א. $(CB9)_{16}$ ב. $(1B16)_{16}$ ג. $(747)_8$ ד. $(337)_8$ ה. $(1102)_3$ ו. $(112)_3$.

3) א. $(9A4D)_{16}$ ב. $(57520)_8$ ג. $(101101)_2$.

4) א. 1101 ב. 1010 ג. 111 ושארית של 1001.

המרות מספרים בין בסיסים:

סיכום כללי:

טבלת חזקות של בסיס בינארי:

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	10	1,024	20	1,048,576
1	2	11	2,048	21	2,097,152
2	4	12	4,096	22	4,194,304
3	8	13	8,192	23	8,388,608
4	16	14	16,384	24	16,777,216
5	32	15	32,768	25	33,554,432
6	64	16	65,536	26	67,108,864
7	128	17	131,072	27	134,217,728
8	256	18	262,144	28	268,435,456
9	512	19	524,288	29	536,870,912

המרת מספר (שלם) $M = a_{m-1}a_{m-2}...a_0$ בן m ספרות מבסיס עשרוני לבסיס r :

- נחלק את המספר פי r.
- נרשום את השארית בצד ונחלק את התוצאה השלמה פי r פעם נוספת.
- נחזור על התהליך עד שלא נותר חלק שלם (אלא רק שארית).
- נרשום את המספר המתקבל מהשארית האחרונה כלפי הראשונה.

המרת מספר (שברי) $M = 0.a_{-1}a_{-2}...a_{-m}$ בן m ספרות מבסיס עשרוני לבסיס r :

- נכפול את המספר פי r.
- נרשום את השלם בצד ונכפול את התוצאה השברית פי r פעם נוספת.
- נחזור על התהליך עד שלא נותרה שארית (אלא רק שלם).
- נרשום את המספר המתקבל השלם הראשון כלפי האחרון.

שאלות:

1) המר את המספרים העשרוניים הבאים למספרים בינאריים:

א. 38 ב. 45

ג. 244 ד. 321

ה. 0.125 ו. 0.84375

ז. 0.33 ח. 0.833

ט. 12.25 י. 32.375

יא. 4.07 יב. 61.32

2) כתוב את המספר העשרוני $(61.25)_{10}$ בבסיס 3 ובבסיס 8.

3) כתוב את המספרים הבינאריים הבאים בבסיס הקסדצימלי:

א. 101 ב. 1011

ג. 10010101 ד. 1101110100010110 1101

ה. 101.1 ו. 100101.0010111

4) כתוב את המספרים הבינאריים הבאים בבסיס אוקטלי:

א. 101 ב. 1011

ג. 10010101 ד. 11011101000101101101

ה. 101.1 ו. 100101.0010111

5) כתוב את המספרים הבאים בבסיס בינארי:

א. $(FB)_{16}$ ב. $(40A)_{16}$

ג. $(9.9)_{16}$ ד. $(66)_8$

ה. $(702)_8$ ו. $(2.32)_8$

6) המר את המספרים העשרוניים הבאים לבסיס בינארי, אוקטלי והקסדצימלי:
א. 0.6875.
ב. 0.714 (מצא מספרים בדיוק של 6 ספרות לפחות).

7) כתוב את המספרים הבאים בבסיס המבוקש:
א. המספר $(53)_6$ בבסיס 9.
ב. המספר $(104)_7$ בבסיס 5.
ג. המספר $(444)_5$ בבסיס 6.
ד. המספר $(0.02)_3$ בבסיס 6.
ה. המספר $(32.13)_4$ בבסיס 8.

8) נתון המספר 0.02 בבסיס 3.
א. כתוב את המספר בבסיס 5.
ב. מה המחזוריות הספרות של המספר?
ג. כמה ספרות יהיו במספר (בבסיס 5) עבור דיוק הקטן מ- 10^{-3}?
ד. מה הדיוק של המספר כאשר יש בו 10 ספרות מימין לנקודה העשרונית?

9) באיזה בסיס כל אחת מהמשוואות הבאות נכונה:
א. $(101)^2+2004=12210$.
ב. $3\cdot5+24=51$.
ג. $\frac{40-7\cdot2}{6}=3$.

10) מצא את הבסיס שבו כל אחד מהשוויונות הבאים הוא נכון:
א. $\sqrt{301}=13$.
ב. $\sqrt[4]{121}=3$.

11) מצא את כל הבסיסים שבהם אי השוויונים הבאים הם נכונים:
א. $(11)^2<122$.
ב. $(11)^3<1451$.

12) לפניך המשוואה הבאה: $(22)_x+(22)_y=(102)_x$, כאשר x ו- y הם בסיסים שונים ($x \neq y$).

א. מצא קשר בין x ו- y (זכור כי: $x,y \in \mathbb{N}$).

ב. ידוע כי ההפרש בין הבסיסים הוא 1. מצא את x ו- y.

תשובות סופיות:

1) א. $(100110)_2$ ב. $(101101)_2$ ג. $(11110100)_2$

ד. $(101000001)_2$ ה. $(0.001)_2$ ו. $(0.11011)_2$

ז. $(0.0101010001...)_2$ ח. $(0.110101...)_2$ ט. $(1100.01)_2$

י. $(100000.011)_2$ יא. $(100.00010001...)_2$ יב. $(111101.01010001...)_2$

2) $(75.2)_8=(2021.020202..)_3=(61.25)_{10}$.

3) א. $(5)_{16}$ ב. $(B)_{16}$ ג. $(95)_{16}$ ד. $(DD6D)_{16}$

ה. $(5.8)_{16}$ ו. $(25.2E)_{16}$.

4) א. $(5)_8$ ב. $(13)_8$ ג. $(225)_8$ ד. $(3350555)_8$

ה. $(5.4)_8$ ו. $(45.134)_8$.

5) א. $(11111011)_2$ ב. $(010000001010)_2$ ג. $(1001.1001)_2$

ד. $(110110)_2$ ג. $(111000010)_2$ ו. $(010.011010)_2$.

6) א. $(0.B)_{16}=(0.54)_8=(0.1011)_2$

ב. $(0.B4)_{16}=(0.55)_8=(0.101101)_2$.

7) א. $(36)_9$ ב. $(203)_5$ ג. $(324)_6$ ד. $(0.12)_6$ ה. $(16.34)_8$.

8) א. $(0.1023410234...)_5$ ב. $\overline{10234}$ ג. 0.102 ד. $7.1\cdot 10^{-5}$.

9) א. $r=5$ ב. $r=6$ ג. $r=8$.

10) א. $r=4$ ב. $r=8$.

11) א. כל בסיס שמקיים: $r \geq 3$. ב. כל בסיס שמקיים: $r \geq 6$.

12) א. $x=1+\sqrt{2y+3}$ ב. $y=3$, $x=4$.

מספרים משלימים:

סיכום כללי:

הגדרת מספרים משלימים:

בהינתן מערכת ספרות בבסיס r, שני מספרים a ו- b בני n ספרות, ייקראו משלימים זה של זה אם: $a+b=r^n$.

בהינתן מערכת ספרות בבסיס r נוכל להגדיר שני סוגי משלימים:

- המשלים ל- $r-1$ (באנגלית: The Diminished Radix Complement).
- המשלים ל- r (באנגלית: The Radix Complement).

המשלים ל- r:

המשלים ל- r של מספר N בעל n ספרות, בבסיס r הוא: $\bar{N}=r^n-N$.
כדי למצוא את המשלים ל- r ניתן לקחת את המשלים ל- $r-1$ ולהוסיף 1 לתוצאה.
(ראה דוגמאות בבסיס עשרוני ובינארי בסרטוני הוידאו באתר גול).

המשלים ל- $r-1$:

המשלים ל- $r-1$ של מספר N בעל n ספרות, בבסיס r, הוא: $\bar{N}=\left(r^n-1\right)-N$.
(ראה דוגמאות בבסיס עשרוני ובינארי בסרטוני הוידאו באתר גול).

מציאת המשלימים של שברים:

במקרה של שבר נתעלם מהנקודה ונבצע את אותן השיטות.
לבסוף נחזיר את הנקודה לתוצאה במיקום היחסי שבו היא הייתה.

הערות:

- לביצוע המשלים ל-1 (של מספר בינארי) יש להפוך את כל הסיביות שלו.
- לביצוע המשלים ל-2 (של מספר בינארי) יש להעתיק את כל הסיביות (מה-LSB) עד ה-1 הראשון. לאחר מכן יש להפוך את יתרת הסיביות.

שאלות:

1) כתוב את המשלימים של המספרים העשרוניים הבאים לפי כל שיטה:

א. המשלים ל-9 של $(8054)_{10}$.

ב. המשלים ל-9 של $(0.625)_{10}$.

ג. המשלים ל-10 של $(8054)_{10}$.

ד. המשלים ל-10 של $(0.625)_{10}$.

2) כתוב את המשלימים של המספרים הבינאריים הבאים לפי כל שיטה:

א. המשלים ל-1 של 110101.

ב. המשלים ל-1 של 0.00011.

ג. המשלים ל-2 של 110101.

ד. המשלים ל-2 של 0.00011.

3) נתון המספר 5AF3.

א. מצא את המשלים ל-16 של המספר הנ"ל.

ב. המר את המספר לבינארי ומצא את המשלים ל-2 שלו.

ג. המר את התוצאה מהסעיף הקודם והשווה לסעיף א'.

תשובות סופיות:

1)	א. 1945	ב. 9.374	ג. 1946	ד. 9.375.
2)	א. 001010	ב. 1.111	ג. 001011	ד. 1.11101.
3)	א. A50D	ב. 1010010100001101.		

חיסור מספרים עם שיטות המשלים:

סיכום כללי:

המטרה המרכזית של שימוש במספרים משלימים כי לצורך המרת פעולת החיסור בפעולת חיבור, וזאת מכיוון שהמחשב 'יודע' לבצע רק חיבור בין מספרים.

לשם כך נעזר בשתי שיטות המשלימים בכדי להחליף את פעולת החיסור המבוקשת בפעולה או פעולות חיבור שתיתנה את התוצאה הרצויה.

כאשר נרצה לחסר שני מספרים M ו- N, הנתונים בבסיס r באופן הבא: $M-N$ (כלומר: N הוא המחסר ו- M הוא המחוסר), נבצע את השלבים הבאים:

1) נמיר את פעולת החיסור בחיבור ע"י לקיחת המשלים ל- r של המחסר.
2) נבצע חיבור רגיל.
3) אם תוצאת החיסור חיובית (כלומר: $M \geq N$) נקבל זליגה (End carry) אשר יש להתעלם ממנה.
4) אם תוצאת החיסור שלילית (כלומר: $M < N$) ניקח את המשלים של תוצאת החיבור. במקרה זה התוצאה הסופית תהיה עם סימן שלילי.

עבור לקיחת המשלים ל- $r-1$ נבצע:

- אם תוצאת החיסור חיובית (כלומר: $M \geq N$), יש להוסיף 1 לתוצאה הסופית.
- אם תוצאת החיסור שלילית (כלומר: $M < N$) אין צורך באף שינוי.

הערות:

1) אנו כעת מתעלמים מסימן המספר - דבר שיקבל דיון מורחב בנושא הבא.
2) נבחין כי במחשב העובד לפי שיטת המשלים ל- r, ההמרה של פעולת חיסור תתבטא בפעולת חיבור אחת בעוד שמחשב העובד לפי שיטת המשלים ל- $r-1$ יהיה צורך בשתי פעולות חיבור על מנת לקבל את התוצאה הרצויה.

מציאת המשלימים של שברים:

במקרה של שבר נתעלם מהנקודה ונבצע את אותן השיטות.
לבסוף נחזיר את הנקודה לתוצאה במיקום היחסי שבו היא הייתה.

שאלות:

1) בצע את חיסור המספרים הבא באמצעות המשלים המצוין:

א. $(3752-748)_{10}$ בעזרת המשלים ל-10.

ב. $(352-6408)_{10}$ בעזרת המשלים ל-10.

ג. $(3752-748)_{10}$ בעזרת המשלים ל-9.

ד. $(352-6408)_{10}$ בעזרת המשלים ל-9.

2) בצע את חיסור המספרים הבא באמצעות המשלים המצוין:

א. $(10110110-10010)_2$ בעזרת המשלים ל-2.

ב. $(10010-11000011)_2$ בעזרת המשלים ל-2.

ג. $(10110110-10010)_2$ בעזרת המשלים ל-1.

ד. $(10010-11000011)_2$ בעזרת המשלים ל-1.

תשובות סופיות:

1) א. 3004 ב. -6056 ג. 3004 ד. -6056.

2) א. 10100100 ב. -10110001 ג. 10100100 ד. -10110001.

פעולות אריתמטיות עם מספרים בינאריים מכוונים:

סיכום כללי:

הצגת מספר מכוון:

מקרה ראשון (Singed): $\underbrace{\boxed{a_0}}_{sign}\underbrace{\boxed{a_1}\boxed{a_2}\cdots\boxed{a_n}}_{magnitude}$.

מקרה שני (Unsigned): $\underbrace{\boxed{a_0}\boxed{a_1}\boxed{a_2}\cdots\boxed{a_n}}_{magnitude}$.

3 דרכים להציג מספרים מכוונים:

- הצגת סימן-גודל: Sign-Magnitude
- הצגת משלים ל-1: Signed-1's-complement representation.
- הצגת משלים ל-2: Signed-2's-complement representation.

הצגת מספר עשרוני ב-3 השיטות:

Singed-2's complement	Signed-1's complement	Signed Magnitude	ערך עשרוני
0111	0111	0111	+7
0110	0110	0110	+6
0101	0101	0101	+5
0100	0100	0100	+4
0011	0011	0011	+3
0010	0010	0010	+2
0001	0001	0001	+1
0000	0000	0000	+0
-	1111	1000	-0
1111	1110	1001	-1
1110	1101	1010	-2
1101	1100	1011	-3
1100	1011	1100	-4
1011	1010	1101	-5
1010	1001	1110	-6
1001	1000	1111	-7
1000	-	-	-8

- בייצוג מספרים ב-3 השיטות, מספר חיובי יכיל 0 בסיבית ה-MSB שלו ומספר שלילי יכיל 1. כך ההצגה של מספרים חיוביים בשיטות המשלים זהות להצגה בינארית רגילה בעוד שלהצגה של מספרים שליליים קיים יתרון אשר שונה משיטה לשיטה.
- עקב הקונפליקט בהצגת המספר 0 בשיטת SM ו-.1's comp, מקובל לייצג מספרים שליליים ולבצע פעולות אריתמטיות של חיבור וחיסור ע״י הצגתם בשיטת המשלים ל-2 בלבד.
- השיטות האחרות משמשות לביצוע פעולות לוגיות וייצוגים מסוימים במחשבים התלויים ביישום ובמטרה שלהם.

אופן ההמרה של פעולות חיסור עם מספרים מכוונים לחיבור:

על מנת לבצע חיסור של מספרים מכוונים, נמיר אותו לחיבור לפי הכללים:

$$(\pm A)-(+B)=(\pm A)+(-B)$$
$$(\pm A)-(-B)=(\pm A)+(+B)$$

כך, נוכל להפוך כל פעולה עם מספרים המיוצגים בשיטת המשלים ל-2 לפעולת חיבור.

מסקנות וסיכום בנוגע לחיבור וחיסור של מספרים מכוונים:

כדי לבצע חיבור של מספרים מכוונים, כאשר מספר שלילי מיוצג בשיטת המשלים ל-2, והמספרים עצמם נתונים בערכם העשרוני:

- נכתוב אותם כ-unsigned (ערך בלבד) ונרפד את המספר גדול מביניהם (בערכו המוחלט) עם זוג אפסים (00) או זוג אחדים (11) לפי סימנו.
נרפד את המספר הקטן בהתאם כך שאורכם יהיה זהה.
- נבצע חיבור אריתמטי פשוט.
(במידה ויש לבצע חיסור, נמיר את המחסר ע״י לקיחת המשלים ונהפוך את התרגיל לחיבור).

בצורה זו מובטח כי תוצאת החיבור תוך לקיחת המשלים של המספרים השליליים תמיד תהיה מיוצגת בשיטת המשלים ל-2 כאשר יש להתעלם מסיבית ה-Carry (ה-Stack Overflow).

שאלות:

1) הצג את המספרים הבאים בשלוש השיטות: שיטת Sign-Magnitude, שיטת המשלים ל-1 ושיטת המשלים ל-2.

א. -43 ב. -75 ג. -158

2) לפניך שני מספרים הנתונים בהצגת Sign-Magnitude: (+3562), (+863). המר את המספרים לפי שיטת המשלים ל-10 וחשב את:

א. $(+3562)+(+863)$ ב. $(+3562)+(-863)$

ג. $(-3562)+(+863)$ ד. $(-3562)+(-863)$

3) נתונים המספרים: +73 ו-+42. המר את המספרים לבסיס בינארי בעזרת שיטת המשלים ל-2, חשב את התרגילים הבאים והחזר לבסיס עשרוני:

א. $(+42)+(-73)$ ב. $(-42)+(-73)$

4) נתונים המספרים: $a=(01000101.0011)_2$ ו-$b=(10110)_2$ המיוצגים בשיטת המשלים ל-$r-1$. חשב את ערך תוצאת החילוק: $\frac{a}{b}$

(רשום גם בשיטת המשלים ל-$r-1$).

5) נתונים המספרים: $a=(1010010.1)_2$ ו-$b=(1000)_2$ המיוצגים בשיטת המשלים ל-r. חשב את ערך תוצאת החילוק: $\frac{a}{b}$

(רשום גם בשיטת המשלים ל-r).

תשובות סופיות:

1) א. Sign Magnitude: 10101011; 1's compelemt: 11010100; 2's compelemt: 11010101

ב. Sign Magnitude: 11001011; 1's compelemt: 10110100; 2's compelemt: 10110101

ג. Sign Magnitude: 110011110; 1's compelemt: 101100001; 2's compelemt: 101100010

2) א. +4425 ב. +2699 ג. -2699 ד. -4425.

3) א. -31 ב. -115.

4) 1's complement: 1000.0100.

5) 0101.1011 (תוצאת החילוק היא חיובית!).

קודים בינאריים:

סיכום כללי:

להלן ריכוז הקודים הבינאריים הנפוצים:

Gray	8,4,-2,-1	Excess 3	2,4,2,1	BCD	ערך עשרוני
0000	0000	0011	0000	0000	0
0001	0111	0100	0001	0001	1
0011	0110	0101	0010	0010	2
0010	0101	0110	0011	0011	3
0110	0100	0111	0100	0100	4
0111	1011	1000	1011	0101	5
0101	1010	1001	1100	0110	6
0100	1001	1010	1101	0111	7
1100	1000	1011	1110	1000	8
1101	1111	1100	1111	1001	9
1111	~~0001~~	~~0000~~	~~0101~~	~~1010~~	10
1110	~~0010~~	~~0001~~	~~0110~~	~~1011~~	11
1010	~~0011~~	~~0010~~	~~0111~~	~~1100~~	12
1011	~~1100~~	~~1101~~	~~1000~~	~~1101~~	13
1001	~~1101~~	~~1110~~	~~1001~~	~~1110~~	14
1000	~~1110~~	~~1111~~	~~1010~~	~~1111~~	15

עבור הקודים BCD, 2,4,2,1, Excess 3 ו- 8,4,-2,-1 הצירופים המתאימים לערכים העשרוניים 10-15 לא קיימים ולא חוקיים.

טבלת קוד ASCII:

<table>
<tr><td></td><td colspan="8">$b_7b_6b_5$</td></tr>
<tr><td>$b_4b_3b_2b_1$</td><td>000</td><td>001</td><td>010</td><td>011</td><td>100</td><td>101</td><td>110</td><td>111</td></tr>
<tr><td>0000</td><td>NUL</td><td>DLE</td><td>SP</td><td>0</td><td>@</td><td>P</td><td>'</td><td>p</td></tr>
<tr><td>0001</td><td>SOH</td><td>DC1</td><td>!</td><td>1</td><td>A</td><td>Q</td><td>a</td><td>q</td></tr>
<tr><td>0010</td><td>STX</td><td>DC2</td><td>"</td><td>2</td><td>B</td><td>R</td><td>b</td><td>r</td></tr>
<tr><td>0011</td><td>ETX</td><td>DC3</td><td>#</td><td>3</td><td>C</td><td>S</td><td>c</td><td>s</td></tr>
<tr><td>0100</td><td>EOT</td><td>DC4</td><td>$</td><td>4</td><td>D</td><td>T</td><td>d</td><td>t</td></tr>
<tr><td>0101</td><td>ENQ</td><td>NAK</td><td>%</td><td>5</td><td>E</td><td>U</td><td>e</td><td>u</td></tr>
<tr><td>0110</td><td>ACK</td><td>SYN</td><td>&</td><td>6</td><td>F</td><td>V</td><td>f</td><td>v</td></tr>
<tr><td>0111</td><td>BEL</td><td>ETB</td><td>'</td><td>7</td><td>G</td><td>W</td><td>g</td><td>w</td></tr>
<tr><td>1000</td><td>BS</td><td>CAN</td><td>(</td><td>8</td><td>H</td><td>X</td><td>h</td><td>x</td></tr>
<tr><td>1001</td><td>HT</td><td>EM</td><td>)</td><td>9</td><td>I</td><td>Y</td><td>i</td><td>y</td></tr>
<tr><td>1010</td><td>LF</td><td>SUB</td><td>*</td><td>:</td><td>J</td><td>Z</td><td>j</td><td>z</td></tr>
<tr><td>1011</td><td>VT</td><td>ESC</td><td>+</td><td>;</td><td>K</td><td>{</td><td>k</td><td>{</td></tr>
<tr><td>1100</td><td>FF</td><td>FS</td><td>,</td><td><</td><td>L</td><td>\</td><td>l</td><td>|</td></tr>
<tr><td>1101</td><td>CR</td><td>GS</td><td>-</td><td>=</td><td>M</td><td>}</td><td>m</td><td>}</td></tr>
<tr><td>1110</td><td>SO</td><td>RS</td><td>.</td><td>></td><td>N</td><td>^</td><td>n</td><td>~</td></tr>
<tr><td>1111</td><td>SI</td><td>US</td><td>/</td><td>?</td><td>O</td><td>_</td><td>o</td><td>DEL</td></tr>
</table>

סיבית הזוגיות (parity bit):

היות וקוד ASCII מורכב מ-7 ביטים, נוכל להוסיף ביט נוסף בצד המשמעותי ביותר וניתן לערך שלו להיות 1 או 0 על מנת שסכום ה-1-ים יהיה זוגי.
לביט הנוסף קוראים סיבית הזוגיות.

שאלות:

1) הצג את המספר העשרוני 5401 לפי כל אחד מהקודים הבאים:
   א. ייצוג בינארי רגיל (ללא קידוד).
   ב. בקוד BCD.
   ג. בקוד Excess-3.
   ד. בקוד 8,4,-2,-1.
   ה. בקוד 2,4,2,1.

2) כתוב את המספרים העשרוניים 423 ו-629 לפי BCD ובצע חיבור שלהם בבסיס זה.

3) מגדירים בסיס בן 4 ספרות שמקבל את המשקלים 6,3,1,1.
כתוב טבלת התאמה עבור 10 הספרות העשרוניות.

4) מגדירים קוד בינארי בן 10 סיביות המייצג כל אחת מעשר הספרות העשרוניות. כל ספרה מקבלת קוד המורכב מתשעה אפסים ו-1 אחד.
   א. הצע 2 דרכים להצגת הספרות העשרוניות באמצעות קוד זה (שני קידודים שונים).
   ב. כעת מציעים קוד נוסף, המייצג את 10 הספרות העשרוניות באמצעות 5 סיביות באופן הבא:
      - עבור מספרים זוגיים ואפס, הקוד מכיל 4 אפסים ו-1 אחד במיקום הסידורי של מחצית המספר הזוגי.
      - עבור מספרים אי-זוגיים, הקוד מכיל 4 אחדים ו-0 אחד במקום הסידורי של מחצית מהמספר העוקב של המספר האי-זוגי.
      i. איזו ספרה עשרונית מייצג הקוד 01000?
      ii. איזו ספרה עשרונית מייצג הקוד 10111?
      iii. כתוב בקוד הנ"ל את הספרות 4,5.

5) כתוב את קוד ASCII עבור: "Hello World!" ע"י שימוש ב-8 סיביות וסיבית זוגיות הקובעת מספר זוגי של 1-ים.

6) קוד Bi-quinary הוא קוד שהיה משמש בחשבוניות ובמחשבים קדומים.
זה הוא קוד בן 7 סיביות הבנוי לפי המשקלים: 5043210.
כאשר כל מילת קוד מורכבת משני 1-ים וחמישה 0-ים.

א. כתוב בטבלה את ייצוג הספרות העשרוניות באמצעות קוד זה ותאר מה מיוחד בו.

ב. חשב את הסכום: 1000100+0100100
וכתוב את התוצאה באמצעות הקוד.

ג. האם הוספת סיבית זוגיות תועיל בשיטת קידוד זו?
מה ניתן לומר על אופן הצגת הספרות בשיטה זו?

7) צורת קידוד שכיחה במערכות טלקומוניקציה נקראת m מתוך n
כאשר הערכים m ו-n נבחרים להיות כאלו שנותנים 10 צירופים שונים.
סוג נפוץ של קוד זה הוא: קוד 2 מתוך 5.
בשיטת קידוד זו קיימות 10 אפשרויות הצגת מספרים לפי המשקלים: 01236.
ככלל, את המספר 0 מציגים ע"י 01100.

א. כתוב בטבלה את ייצוג הספרות העשרוניות באמצעות קוד 2 out of 5.

ב. כתוב את המספר הבא בצורה עשרונית: 11000 01100 00110 00011.

תשובות סופיות:

1) א. 1010100011001 ב. 0101010000000001 ג. 1000011100110100
ד. 1011010000000111 ה. 1011010000000001.

2) 1052.

3) להלן טבלת התאמה:

ערך עשרוני	6,3,1,1
0	0000
1	0001 או 0010
2	0011
3	0100
4	0101 או 0110
5	0111
6	1000
7	1001 או 1010
8	1011
9	1100

4) א. להלן 2 צורות ייצוג של הקוד:

ערך עשרוני	קידוד
0	0000000001
1	0000000010
2	0000000100
3	0000001000
4	0000010000
5	0000100000
6	0001000000
7	0010000000
8	0100000000
9	1000000000

ערך עשרוני	קידוד
0	1000000000
1	0100000000
2	0010000000
3	0001000000
4	0000100000
5	0000010000
6	0000001000
7	0000000100
8	0000000010
9	0000000001

ב. i.6. ב. ii.7. ב. iii 4 : 00100, 5 : 11011.

5) להלן הקוד:

$\underbrace{01001000}_{H}\ \underbrace{01100101}_{e}\ \underbrace{01101100}_{l}\ \underbrace{01101100}_{l}\ \underbrace{01101111}_{o}\ \underbrace{10100000}_{\_}$

$\underbrace{11010111}_{W}\ \underbrace{10100000}_{o}\ \underbrace{01110010}_{r}\ \underbrace{01101100}_{l}\ \underbrace{11100100}_{d}\ \underbrace{00100001}_{!}$

6) א. טבלה מופיעה למטה. ב. $(1010000)_{Bi}$ ג. סיבית זוגיות לא תועיל מכיוון שכל מילת קוד מכילה שני ביטים של 1 ולכן לא תאפשר זיהוי שגיאות.

ספרה עשרונית	Bi-Quinary
0	0100001
1	0100010
2	0100100
3	0101000
4	0110000
5	1000001
6	1000010
7	1000100
8	1001000
9	1010000

7) א. להלן טבלה: ב. 1059.

ערך עשרוני	קידוד: 01236
0	01100
1	11000
2	10100
3	10010
4	01010
5	00110
6	10001
7	01001
8	00101
9	00011

ייצוג מספרים בשיטת הנקודה הצפה:

סיכום כללי:

תיאור השיטה:

ייצוג מספרים בצורה מדעית, ע"י שימוש בנקודה העשרונית,
נקרא בשם: Fixed point representation או Floating point representation.

$$\boxed{(N)_{10} = \pm(d.xxxx)\cdot 10^{yyyy}} \quad ; \quad d, xxxx, yyyy \in [0:9]$$

$$\boxed{(N)_{2} = \pm(1.xxxx)\cdot 2^{\pm yyyy}} \quad ; \quad x, y \in \{0,1\}$$

אופן הייצוג:

הצגת מידע לפי תקן IEEE754: $(-1)^{Sign}\cdot(1.xxx)\cdot 2^{\pm yyy}$ או: $(-1)^{Sign}\cdot(1+Fraction)\cdot 2^{Exponent}$

כאשר מקצים את הביטים לכל חלק באופן הבא:

Sign	Exponent	Fraction
31	30 23	22 0

שדה ה-Exponent ושדה ה-Fraction מכילים את הערכים הבינאריים של המספר.
עבור ערכים שליליים נשתמש בייצוג לפי המשלים ל-2.

הערכת סדרי גודל:

טווח מספרים לחזקות: $Exponent \in \left[2^7-1 : -2^7\right] = [127 : -128]$.

השבר המירבי הוא: $1-2^{-23}$ (רצף של 1-ים) ולכן מגדירים: $1 \le 1+Fraction < 2$.

רמת דיוק מירבית של שבר (רזולוציה) היא: 2^{-23}.

כמות המספרים הניתנים להצגה בשיטת הנקודה הצפה: $\left[2^{127} : 2^{-128}\right] = \left[10^{38} : 10^{-38}\right]$.

כמות המספרים הניתנים להצגה בייצוג בינארי רגיל: $\left[2^{31}\text{-}1 : \text{-}2^{31}\right] = \left[10^{10} : \text{-}10^{10}\right]$.

שאלות:

1) כתוב את המספרים העשרוניים הבאים בשיטת הנקודה הצפה:

א. 67
ב. 3225
ג. -145
ד. -4421
ה. 0.375
ו. -0.15625
ז. 0.078125
ח. -0.00390625
ט. $-732.5\cdot10^{-1}$
י. $0.420625\cdot10^{4}$

2) רשום את המספרים הבאים בייצוג Floating Point לפי הפורמט הבא: (s,e_1,e_0,m_2,m_1,m_0) כאשר s היא סיבית הסימן, e_1,e_0 מייצגים את החזקה ו- m_2,m_1,m_0 מייצגים את ה-mantissa.
ערך המספר הוא: $(-1)^s\cdot2^{2e_1+e_0}\cdot\left(m_2\cdot2^2+m_1\cdot2^1+m_0\cdot2^0\right)$
(ציין האם ניתן לייצגם במדויק).

א. 5.
ב. -17.
ג. 42.
ד. -45.

3) מצא את המספרים הבאים המיוצגים בשיטת ה-Floating point לפי סטנדרט IEEE754:

א. 0-10001011-01100000000000000000000
ב. 1-01101001-10100000000000000000000
ג. 1-11111101-00010000000000000000000

4) למדנו כי מספר המיוצג בשיטת ה-Floating point מורכב מ-3 חלקים:

i. Mantissa – מספר בעל N_m ספרות.

ii. Exponent - מספר בעל N_e ספרות.

iii. Sign – ספרה אחת.

להלן צורת ההצגה הכללית:

Mantissa - N_m ספרות	Exponent - N_e ספרות	Sign – ספרה אחת

המספר המיוצג הוא: $(-1)^{sign} \cdot M \cdot 2^E$ כאשר M הוא המספר המיוצג ע"י $1+N_m$, ו-E הוא המספר המיוצג ע"י N_e. נזכור כי שני המספרים, ה- Mantissa וה-Exponent מיוצגים ע"י שיטת המשלים ל-2.

1. נגדיר תחום דינאמי של שיטת הייצוג בתור תחום המספרים הניתנים לייצוג.
2. נגדיר את הרזולוציה של שיטת הייצוג בתור המרחק המירבי בין זוג מספרים סמוכים המוצגים באותה השיטה.

במחשב סיני עתיק מוצגים מספרים בשיטת ה-Floating point לפי המבנה הבא:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Sign	Exponent					Mantissa					

כאשר ה-Exponent מכיל סיבית סימן (ועבור מספרים שליליים נעזר במשלים ל-2).

א. מהם טווח הייצוג (התחום הדינאמי) והרזולוציה של מחשב זה?

ב. נדרש לשנות את התחום הדינאמי והרזולוציה ע"י שינוי בחלוקת הספרות בין שדה ה-Mantissa וה-Exponent. מצא את התחום הדינאמי המירבי והמינימלי האפשריים ואת הרזולוציה המרבית והמינימלית האפשרית.

תשובות סופיות:

1) א. 01000010100001100000000000000000.

ב. 01000101010010011001000000000000.

ג. 11000011000100010000000000000000.

ד. 11000101100010100010100000000000.

ה. 00111110110000000000000000000000.

ו. 10111111000100000000000000000000.

ז. 00111101101000000000000000000000.

ח. 10111011100000000000000000000000.

ט. 11000010100100101000000000000000.

י. 01000101100000011011100100000000.

2) א. 000101 ב. לא ניתן להציג 17- ולכן נציג 16- : 111010

ג. לא ניתן להציג 42 ולכן נציג 40 : 011101.

ד. לא ניתן להציג 45- ולכן נציג 48- : 111110.

3) א. 5632 ב. $-387.430191\cdot 10^{-7}$ ג. $-9.03875\cdot 10^{37}$.

4) א. טווח הייצוג: $-32\cdot 2^{15} < A < 31\cdot 2^{15}$

רזולוציה מינימלית: 2^{-16} רזולוציה מקסימלית: 2^{15}.

ב. להלן פירוט:

צורת חלוקה	תחום דינאמי	רזולוציה
$\boxed{0}\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10}\boxed{11}$	$-2^{511} < A < 2^{511}$	max: 2^{511} min: 2^{-512}
$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11}$	$-512 < A < 511$	max: 2 min: 1

מבוא לתורת האינפורמציה:

סיכום כללי:

מבוא לקודים:

קוד הוא דרך להצפין מידע המועבר ממקום אחד למקום אחר.
לקידוד מידע מספר מטרות:

1) שמירה על חשאיות המידע המועבר ע״י הצפנה מונעת מגורמים עוינים לגנוב המידע.
2) אפשרות של גילוי שגיאות הנגרמות כתוצאה מההעברה עצמה של המידע (בין אם בשידור אלחוטי ובין אם בשידור באמצעות כבלים/סיבים וכו׳).
3) אפשרויות שונות לתיקון של שגיאות אשר זוהו במידע המתקבל.

יתירות מילות קוד:

כידוע, עם n סיביות ניתן להציג 2^n ערכים שונים, אלו ייקראו **מילות קוד**.
קוד בעל n סיביות הכולל 2^n מילות קוד שונות נקרא **קוד ללא יתירות** (Redundancy).

קצב הקוד (Code Rate):

נקרא גם Transmission Rate (קצב שידור) והוא מוגדר בתור היחס שבין מספר ביטי המידע, k, למספר הביטים הכולל המשודרו, n, באופן הבא: $R=\frac{k}{n}$.

מרחק בין שתי מילים בינאריות:

המרחק בין שתי מיליות בינאריות, כל אחת באורך n: $A=(a_n,a_{n-1},....,a_0)$ ו- $B=(b_n,b_{n-1},....,b_0)$ מוגדר בתור מספר הסיביות שיש לשנות ב- A על מנת להגיע ל- B (או להיפך).
נסמן זאת: $d(A,B)$ - המרחק בין A ל- B.

משקל המינג (Hamming Weight):

משקל המינג מוגדר בתוך מספר ה-1-ים שבמילת קוד.
למשל, במילה 10111 יש 4 אחדים ולכן משקלה הוא 4. נסמן זאת: $w(10111)=4$.

מרחק המינג (Hamming Distance):

מספר הסיביות שיש לשנות במילת קוד על מנת להגיע למילת קוד אחרת.
למשל: $d\left(0100,1101\right)=2$.
גאומטרית, נוכל לומר כי יש שני ענפים המפרידים בין שתי מילות הקוד.

הערה:

מרחק המינג בין מילת קוד C לבין הקוד 00000 הוא
פשוט משקל המילה C : $d\left(C,0000\right)=w\left(C\right)$.

מרחק קוד :

מרחק קוד מוגדר בתוך המרחק המינימלי בין שתי מילות קוד תקניות.
נסמן את מרחק הקוד ב- m.

גילוי שגיאות ותיקון שגיאות:

קודים שונים נבדלים זה מזה במספר פרמטרים, ביניהם היכולת לגלות שגיאות והיכולת לתקן שגיאות.

גילוי שגיאה (Error Detection):

כאשר מדברים על גילוי שגיאה הכוונה היא לכך שהקוד יודע שהתקבלה מילה לא תקינה אך לא יודע כיצד לבצע את התיקון (יתכנו מספר אפשרויות, כולן במרחק שווה מהמילה השגויה).

תיקון שגיאה (Error Correction):

בתיקון שגיאה, מדובר על קוד שיודע באיזו סיבית/יות נפלו שגיאות והוא משנה את ערכן כך שתתקבל מילת הקוד התקנית שנשלחה.

נוסחה כללית לגילוי ותיקון שגיאות:

בהינתן קוד שבו המרחק המינימלי בין שתי מילות קוד תקניות הוא m, כמות השגיאות שניתן לגלות (בנוסף לאלו שניתן לתקן) הוא d וכמות השגיאות שניתן לתקן הוא c נוכל להגדיר את הקשר הבא:

$$m = 2c + d + 1$$

פירוט מקרים:

עבור: $m = 1$ נקבל: $c = 0$, $d = 0$ כלומר לא ניתן לגלות שגיאות (ולא לתקן).

עבור: $m = 2$ נקבל: $c = 0$, $d = 1$ כלומר ניתן לגלות שגיאה אחת (אך לא לתקן).

עבור: $m = 3$ נקבל: $c = 0$, $d = 2$ כלומר ניתן לגלות שתי שגיאות (אך לא לתקן אותן).

או: $c = 1$, $d = 1$ כלומר ניתן לגלות שגיאה אחת ולתקן אותה.

עבור: $m = 4$ נקבל: $c = 1$, $d = 1$ כלומר ניתן לגלות שגיאה אחת ולתקן אותה.

או: $c = 0$, $d = 3$ כלומר ניתן לגלות 3 שגיאות אך לא לתקן אותן.

סיבית הזוגיות – תזכורת:

סיביות הזוגיות (Even parity bit) נועדה להשלים את מספר ה-1-ים במילת קוד נתונה לערך זוגי.

באותו האופן ניתן להגדיר סיבית אי-זוגיות (Odd parity bit) שתשלים את מספר ה-1-ים לערך אי-זוגי.

השמת סיבית זוגיות למילות קוד מניב מרחק מינימלי של 2 - כלומר ניתן לגלות שגיאה אך לא לתקן.

קודים לגילוי ותיקון שגיאות:

במסגרת הקורס שלנו נסתפק בהגדרות הבאות עבור קוד עם מרחק קוד של 3:

נסמן את אורך ההודעה המקורית ב- m סיביות מידע, (m הוא מלשון message).

נוסיף k סיביות בדיקה כך שהמילה שתשודר תהיה באורך: $n = m + k$.

נעזר באי השוויון הבא למציאת k: $2^k \geq n + 1$.

קוד המינג (Hamming Code):

קוד המינג הינו קוד לגילוי ותיקון שגיאות עם מרחק קוד של 3.

לקוד m סיביות מידע ו- k סיביות בדיקה אשר הן סיביות זוגיות (Parity bits).

קוד שבו 4 סיביות מידע ו-3 סיביות זוגיות, קרוי Hamming (7,4) code.

נסמן: $M=(m_1m_2m_3m_4)_2$ את ההודעה המשודרת וב- $p_1p_2p_3$ את סיביות הזוגיות.

בצד המקלט, מתקבל הקוד בצורה הבאה: $\boxed{b_1}\boxed{b_2}\boxed{b_3}\boxed{b_4}\boxed{b_5}\boxed{b_6}\boxed{b_7}$ כאשר b_1 הוא ה-LSB!

סיביות הזוגיות יהיו בכל המקומות שהן חזקות שלמות של 2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
p_1	p_2		p_3				p_4								p_5	

דוגמא עבור קוד בן 7 סיביות:

P_1	P_2	D_3	P_4	D_5	D_6	D_7
p_1	p_2	m_1	p_3	m_2	m_3	m_4

החוקיות של סיביות הזוגיות הן כדלהלן:

כל סיבית זוגיות צריכה להשלים למספר זוגי של 1-ים עבור סיביות המידע הבאות:

$$P_1 \rightarrow D_3D_5D_7$$
$$P_2 \rightarrow D_3D_6D_7$$
$$P_4 \rightarrow D_5D_6D_7$$

ניתוח בצד המקלט:

נסמן בצורה הכללית ביותר את הקוד המתקבל: $W=(w_1\,w_2\,w_3\,w_4\,w_5\,w_6\,w_7)_2$

נבצע את תהליך הבדיקה הבא:

נכתוב ערך תיקון, שהוא מילה בינארית בת 3 סיביות: $C_3C_2C_1$ המוגדרות כך:

$$C_3=P(w_4,w_5,w_6,w_7)=w_4\oplus w_5\oplus w_6\oplus w_7$$
$$C_2=P(w_2,w_3,w_6,w_7)=w_2\oplus w_3\oplus w_6\oplus w_7$$
$$C_1=P(w_1,w_3,w_5,w_7)=w_1\oplus w_3\oplus w_5\oplus w_7$$

המיקום של הסיבית השגויה הוא הערך העשרוני של המילה הבינארית $C_3C_2C_1$.

אם מתקבל הערך 0 הרי שאין שגיאה והמילה המתקבלת תקינה לחלוטין.

שאלות:

1) לפניך מספר מילים המיוצגות בקוד Hamming(7,4).
קבע אלו מהן תקינות ואלו אינן תקינות. עבור המילים שאינן תקינות קבע כמה שגיאות קרו, באלו סיביות, והאם ניתן לתקן אותן.
א. 1010101
ב. 0111000
ג. 1011101

2) כתוב בקוד Hamming את הקודים שיש לשדר עבור המילים הבאות:
א. 1001
ב. 10111
ג. 100010011110

3) רוצים לשדר את המילה 0001 באמצעות קוד Hamming(7,4).
א. כתוב את מילת הקוד המשודרת.
ב. המקלט קיבל את המילה השגויה הבאה: 1000001.
i. כמה שגיאות קיימות במילה ובאלו סיביות?
ii. האם המקלט יכול לגלות את השגיאות ולתקן אותן?
ג. בהנחה כי מדיניות המקלט היא לגלות ולתקן שגיאות, איזו מילה הוא יקבל? הסבר את התופעה מבחינה גאומטרית.

תשובות סופיות:

1) א. תקין ב. לא תקין (שגיאה בסיבית 5) ג. לא תקין (שגיאה בסיבית 4).
2) א. 0011001 ב. 111001111 ג. 01100001100111100.
3) א. 1101001 ב. i. 2 שגיאות, בסיביות 2 ו-4.
ב. ii. המקלט לא יכול לגלות את השגיאות או לתקן אותן.
ג. 1101001.

פתרון שאלות כדוגמת ממן 11:

סיכום כללי:

נושא זה מוקדש לפתרון שאלות של גול אשר חוברו במיוחד ברוח השאלות שניתנו במסגרת שיעורי הבית של ממ"ן 11.

שאלות:

1) המירו את המספר $(325.47)_8$ לבסיס 16.

2) המירו את המספר $(142.3)_5$ לבסיס 7.

3) חשבו בשיטת המשלים ל-6 את ערך החיסור: $(34.5)_6-(1.24)_6$.

4) במערכת תקשורת מסוימת משתמשים בקוד Hamming ל-BCD כדי לקודד סיפרה עשרונית. בכל אחד מהמקרים הבאים מניחים שנפלו מספר שגיאות במילת הקוד המשודרת.
האם תהליך הגילוי יכול לזהות את השגיאה? לתקן אותה? או שהוא יראה כי לא נפלה שגיאה כלל? נמק בכל מקרה:

א. נפלה שגיאה בודדת.

ב. נפלו שתי שגיאות.

ג. נפלו 3 שגיאות.

5) למדנו כי אלגברה בוליאנית היא מבנה אלגברי שמוגדר ע"י סט אלמנטים כלשהו B ושתי פעולות $+$ ו-$\cdot$ המקיימות:

(1) סגירות:

א. המבנה סגור ביחס לאופרטור $+$.

ב. המבנה סגור ביחס לאופרטור $\cdot$.

(2) איבר הזהות:

א. האלמנט '0' הוא הזהות של הפעולה $+$.

ב. האלמנט '1' הוא הזהות של הפעולה $\cdot$.

(3) קומוטטיביות:

א. המבנה הוא קומוטטיבי ביחס ל $+$.

ב. המבנה הוא קומוטטיבי ביחס ל $\cdot$.

(4) פילוגיות:

א. האופרטור $+$ הוא פילוגי ביחס ל $\cdot$.

ב. האופרטור $\cdot$ הוא פילוגי ביחס ל $+$.

(5) לכל איבר $x \in B$ קיים משלים $\overline{x} \in B$ המקיים: $x \cdot \overline{x} = 0$, $x + \overline{x} = 1$.

(6) יש לפחות שני איברים בסט B, כלומר: $x, y \in B$.

האם ניתן להוכיח כי קיימת אלגברה אונרית, כלומר, כזו שכוללת איבר אחד בלבד בסט B, המקיימת את כל ששת האקסיומות של הנטינגטון?
אם כן - כתבו הוכחה מתאימה. אם לא - נמקו מדוע והביאו דוגמא לאי-קיום אלגברה שכזו. במידה ולא קיימת אלגברה שכזו, אלו הנחות היא כן יכולה לקיים? נמקו.

תשובות סופיות:

1) $(\text{D5.9C})_{16}$.

2) $(65.\overline{4125})_7$.

3) $(33.22)_6$.

4) א. ניתן לזהות וניתן לתקן.
ב. ניתן לזהות אך לא ניתן לתקן.
ג. לא ניתן לזהות.

5) לא - אקסיומה 6 לא מתקיימת.